福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第十一次研讨会

关于线性变换的可交换问题

杨忠鹏[1]　王海明[1]　张金辉[1]　吴秀清[1，2]

1. 莆田学院数学系

2. 中南大学数学院

2009年5月16日

目　录

- 引言
- 可交换的线性变换的相关习题及结论
- 可交换的线性变换的一些讨论
- 参考文献

一、引言

设$V(P)$为数域P上的线性空间，而$L(V(P))=\{\sigma|\sigma\text{为}V\text{上的线性变换}\}$，$\varepsilon$为恒等变换。

现行的教材上线性空间求其上的线性变换的定义是对一般空间给出的。因此教学要兼顾一般情况下的定义又要将重点放在有限维空间上。

当$V_n(P)$为P上n维线性空间时，设$V_n(P)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)A，\sigma\in L(V_n(P))，A\in P^{n\times n} \qquad (1)$$

$$L(V_n(P))\cong P^{n\times n} \qquad (2)$$

由（1）（2）知$\sigma\in L(V_n(P))$与$A\in P^{n\times n}$互为唯一确定，同时说明针对(1)中矩阵A成为解决线性变换的基本工具。这样有限维空间上线性变换的可交换问题就可以转化为$P^{n\times n}$中矩阵的可交换问题。

二、可交换的线性变换的相关习题及结论

下面是结合我们教学及研究收集到的习题。

习题 1（见[1, P323, 习题 12]）设V是数域P上n维线性空间，证明V的与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换。

习题 2（见[1, P326, 习题 25]）设V是数域P上n维线性空间，σ,τ是V上的线性变换，且$\sigma\tau=\tau\sigma$ 证明：

(1)如果λ_0是σ的一特征值，那么V_{λ_0}是τ上不变子空间。

(2)σ,τ至少有一个公共的特征向量。

习题 3（见[4, 习题 9. 5. 15]）复数域上n维线性空间V上线性变换σ的所有特征值组成的n元数组称为σ的谱，如果σ的所有特征值都是1重的，则σ的谱称为单的。设σ的谱是单的

(1)证明：如果线性变换τ和σ可交换，则τ能表示成σ的一个次数小于n的多项式。

(2)证明：σ可交换的所有线性变换全是$L(V_n(C))$的一个子空间，记作$C(\sigma)$，$\dim C(\sigma)=\dim V$

习题 4（见[4, 习题 9.6.4]）设V是复数域上的n维线性空间，σ,τ是V上的线性变换，$\sigma\tau=\tau\sigma$，设σ有s个不同的特征值，证明：σ与τ至少有s个公共的特征向量，且它们线性无关。

习题 5（见[5, P323, 例 6.3.5]）设σ,τ为n维线性空间V上的线性变换且各自有特征向量组成的基，试证：$\sigma\tau=\tau\sigma$的充要条件是V中存在一个基，其中每个基向量都是σ与τ的公共向量。

习题 6（见[6, 习题 5.6.5]）设V是σ上的n维线性空间，$\sigma,\tau\in L(V_n(P))$且$\sigma\tau=\tau\sigma$，σ,τ各在一组基下的矩阵为对角阵。即σ,τ可在同一基下的矩阵为对角阵。

习题 7（见[7, P238, 例 20]）设σ是数域P上n维线性空间V上线性变换且$\sigma^2=\sigma$，证明：

1）$\sigma^{-1}(0)=\{\xi-\sigma(\xi) \mid \xi\in V\}$

2) $V=\sigma^{-1}(0)\oplus\sigma(V)$

3）若τ是V上一个线性变换，则$\sigma^{-1}(0)$和$\sigma(V)$都在τ之下不变的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$

习题 8（见[5 , P293]）设$\sigma\in L(V_n)$，满足$\sigma^2=\sigma$，证明

(1)$V=V_0+V_1$ 其中V_0,V_1分别是V上属于特征值 0 和 1 的特征子空间。

(2)若$\tau\in L(V_n)$，则V_0,V_1都是$\tau-$子空间的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$。

习题 9（见[2, P35, 习题 7. 4. 5]）令S是数域F上向量空间V的一些线性变换所成的集合。V的一个子空间W如果在S中每一线性变换之下不变，那么就说W是S的一个不变子空间。S说是不可约的，如果S在V中没有非平凡的不变子空间。设S是不可约，而φ是V的一个线性变换，它与S中每一线性变换可交换。证明φ或者是零变换，或者是可逆变换。

习题 10（见[7, P240, 例 22]）设V是数域P上n维线性空间，σ,τ是V上的两个线性变换，σ在P上有n个互异的特征值，则有

1）σ的特征向量都是τ的特征向量的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma$。

2）若$\sigma\tau=\tau\sigma$，则τ是$\varepsilon,\sigma,\sigma^2,\cdots\sigma^{n-1}$的线性组合。其中$\varepsilon$为恒等变换。

习题 11（见[7, P237, 例 18]）σ,τ是线性变换，$\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$，证明：

(1)如果$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$，那么$\sigma\tau=0$。

(2)如果$\sigma\tau=\tau\sigma$，那么$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$

习题 12（见[2, P35, 习题 7. 4. 4]）设σ,τ是线性空间V上的线性变换，且$\sigma\tau=\tau\sigma$，证明：$Ker\sigma$和$\operatorname{Im}\sigma$都在τ之下不变。

习题 13（见[2, P39, 习题 7. 6. 7]）设V是复数域上一个n维向量空间，S是V的某些线性变换所成的集合，而φ是V的一个线性变换，并且φ与S中每一线性变换可交换。证明如果S不可约。那么φ一定是位似。

习题 14（见[3, 习题 9. 1. 1]）$\sigma^2=\sigma$为线性空间V上的线性变换，证明$Ker\sigma$和$\mathrm{Im}\,\sigma$对线性变换τ不变的充要条件为$\sigma\tau=\tau\sigma$。

习题 15（见[5, 例题 6. 4. 2]）$V=V_1\oplus V_2$，$\sigma,\tau\in L(V)$,
$\forall\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V\,(\alpha_i\in V_i, i=1,2)$都有 $\sigma(\alpha)=\alpha_1$
证明：V_1与V_2都是τ不变子空间的充要条件为$\sigma\tau=\tau\sigma$。

习题 16（见[7, P237, 例 18]）设σ,τ为数域P上线性空间V上线性变换，且$\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$。证明：

1）$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$的充要条件是$\sigma\tau=\tau\sigma=0$

2）$\sigma(V)=\tau(V)$的充要条件是$\sigma\tau=\tau,\tau\sigma=\sigma$

3）$\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$的充要条件是$\sigma\tau=\sigma,\tau\sigma=\tau$

4）若$\sigma\tau=\tau\sigma$，则$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$

5）若$\sigma\tau=\tau\sigma=0$，则$(\sigma+\tau)(V)=\sigma(V)+\tau(V)$，

$(\sigma+\tau)^{-1}(0)=\sigma^{-1}(0)+\tau^{-1}(0)$

习题 11、12、13、14、15、16 是在一般线性空间中对线性变换进行讨论。这么多的习题表明了一般线性空间上线性变换的教学也是不可回避的。

习题 1-10 都是对n维线性空间给出的，这些问题的处理利用（1）、（2）所指的关系，矩阵是一个基本工具。当然按一般线性空间来处理对于基础好的学生也是一个提高能力的好机会。

通过我们的教学实践发现习题 7 和 8 对一般的线性空间是成立的。

下面对此问题作简单讨论。

三、可交换的线性变换的一些讨论

问题的来源[8]有一题目

设σ,τ是V上的线性变换，若$\sigma\tau=\sigma+\tau$，则$\sigma\tau=\tau\sigma$

命题 1 设$\sigma,\tau\in L(V_n(P))$，若$\sigma\tau=\sigma+\tau$，则$\sigma\tau=\tau\sigma$

证明 在（1）（2）之下

设 $\tau(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)B \qquad B\in P^{n\times n}$ （3）

由（1）（2）（3）知此时等价于 $AB=A+B$

$$E=AB-A-B+E=(A-E)(B-E)$$

因为 $A-E,B-E\in P^{n\times n}$，所以可得

$$E=(B-E)(A-E)=BA-B-A+E$$

$$BA=A+B=AB$$

这样从（1）（2）（3）可知 $\sigma\tau=\tau\sigma$ 　　证毕。

在命题 1 证明中，本质在于

$$\sigma\tau=\varepsilon\Rightarrow\tau\sigma=\varepsilon \qquad \sigma,\tau\in L(V_n(P)) \tag{4}$$

例 1 设$V=P[X]$(一元多项式的集合)则$V(P)$是无限维的线性空间。

定义$\sigma(f(x))=f'(x) \quad \tau(f(x))=\int_0^x f(t)dt \qquad f(x)\in P[x]$

易知

$\sigma,\tau\in L(V(P))$，且$\sigma\tau(f(x))=\sigma(\tau(f(x)))=\sigma(\int_0^x f(t)dt)=f(x)$

即$\sigma\tau=\varepsilon$

但$\tau\sigma(f(x))=\tau(f'(x))=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$

则当$f(0)\neq 0$时，$f(x)\in P[x],\tau\sigma\neq\varepsilon$

例1说明（4）对一般的线性空间未必成立。

命题 2 设$\sigma,\tau\in L(V_n(P))$，$k\neq 0\in P$，如果$\sigma=(\sigma-k\varepsilon)\tau$，则$\sigma\tau=\tau\sigma$

证明 由$\sigma=\sigma\tau-k\tau$，即

$$\sigma\tau=\sigma+k\tau \qquad (5)$$

令$\sigma_1=\frac{1}{k}\sigma$，则$\sigma_1\in L(V_n(P))$

且从（5）得

$$\sigma_1\tau=\sigma_1+\tau,\sigma_1,\tau\in L(V_n(P)) \qquad (6)$$

这样从命题 1 和（6）得

$\sigma_1\tau=\frac{1}{k}\sigma\tau=\tau(\frac{1}{k}\sigma)=\tau\sigma_1$即$\tau\sigma=\sigma\tau$ 证毕

在命题2中当*k*=1时即得命题1。

文献[9, 定理 3]韩锦扬证明了

设 $A, B \in P^{n\times n}, \forall k \in P$，若 $A=(A-kE)B$ 且 A, B 均可逆，则 $AB=BA$。

之后[10, 定理 3(2)]也得到这个结果. 在(1) (2)所设之下也得到这个结果可被改进为并在[10][11]也曾经得到过。

命题 3 设 $A, B \in P^{n\times n}$, 若 $A=(A-kE)B$ 且 $k\neq 0$, 则 $AB=BA$。

命题 4 设 $\sigma, \tau \in L(V_n(P))$，$a, b \in p$，且 $ab\neq 0$，

若 $\sigma\tau = a\sigma + b\tau$，则 $\sigma\tau=\tau\sigma$

证明 因为$ab\neq 0$及$\sigma\tau=a\sigma+b\tau$ （7）

令$\tau_1=\dfrac{1}{a}\tau$ ，则$\tau_1\in L(V_n(P))$

且从(7)得

$$\sigma=(\sigma-b\varepsilon)\tau_1 \qquad (8)$$

由命题 2 和(8)得

$$\sigma\tau_1=\sigma(\frac{1}{a}\tau)=\frac{1}{a}(\sigma\tau)=(\frac{1}{a}\tau)\sigma=\tau_1\sigma \text{即} \sigma\tau=\tau\sigma \text{证毕。}$$

从（1）（2）（3）可得作为特例可得命题 1 在有限维空间上可交换线性变换的结论。

由（1）（2）（3）可得

命题 5 设$A,B\in P^{n\times n}$，$a,b\in P$，若$AB=aA+bB$且$ab\neq 0$，则$AB=BA$。

在[10][11]也得到过命题 5。

命题 6（见[12]，P144 例 7.9）A,B是三阶矩阵，若$AB=A-B$，若$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是$A$的 3 个不同的特征值，证明：

1）$\lambda_i\neq -1(i=1,2,3)$

2）存在可逆矩阵P，$st\ P^{-1}AP,P^{-1}BP$同时可对角阵。

这是作为非数学专业的考研的复习题。

这可作为命题 2 的应用我们可得到：

命题 7　$A,B\in P^{n\times n}$，若 $AB=A-B$，若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是 A 的 n 个不同的特征值，证明：

1）$AB=BA$

2）$\lambda_i\neq -1(i=1,2,\cdots n)$ 且存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP,P^{-1}BP$ 同时可对角阵。

证明

1）因为$AB = A - B$等价于$A = (A+E)B$

由命题 3（相当于满足$k = -1$）得，可知$AB = BA$

2）因为$AB = A - B$即$(A+E)(B-E) = -E$　所以$A+E$可逆。

所以 -1 不为A的特征值即$\lambda_i \neq -1 (i = 1, 2, \cdots n)$

由 1）可得

存在可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$同时可对角阵。证毕

我们应用了命题 2 及矩阵上的形式，使得命题 6 成为特例，当然这样的证明与[12]解法不同。

例 2:

设 $f(x)\in P[x]\sigma(f(x))=f^{'}(x)+f(x)\quad \tau(f(x))=\int_0^x f(t)dt+f(x)$,

则易知$\sigma,\tau\in L(P[x])$，此时

$$\sigma\tau(f(x))=\sigma\left[\int_0^x f(t)dt+f(x)\right]$$

$$=\left[\int_0^x f(t)dt+f(x)\right]^{'}+\left[\int_0^x f(t)dt+f(x)\right]$$

$$=f(x)+f^{'}(x)+\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt+2f(x)+f^{'}(x)$$

$$(\sigma+\tau)(f(x))=\sigma(f(x))+\tau(f(x))=f^{'}(x)+f(x)+\int_0^x f(t)dt+f(x)$$

所以$\sigma\tau=\sigma+\tau$

$$\tau\sigma(f(x)) = \tau(f'(x) + f(x))$$

$$= \int_0^x (f'(t) + f(t))dt + f'(x) + f(x)$$

$$= f(x) - f(0) + \int_0^x f(t)dt + f'(x) + f(x)$$

$$= \int_0^x f(t)dt + 2f(x) + f'(x) - f(0)$$

$$\sigma\tau(f(x)) \neq \tau\sigma(f(x))$$

所以 $\sigma\tau \neq \tau\sigma$

例2说明问题的结论命题1对一般无限维的线性空间的线性变换是未必成立。

四、参考文献

[1]北京大学数学系编，高等代数（第三版），高等教育出版社，北京（2003）

[2]张禾瑞、郝炳新。高等代数（第四版），高等教育出版社，北京

[3]杨子胥.高等代数习题解(修订版)上、下册，山东科学技术出版社，济南（2001）

[4]邱维声.高等代数上、下册，高等教育出版社

[5]白述伟.高等代数选讲，黑龙江教育出版社，哈尔滨（1996）

[6]孟道骥.高等代数与解析几何（第二版），科学出版社，北京（2007）

[7]李师正主编.高等代数解题方法与技巧，高等教育出版社，北京（2004）

[8]林亚南.高等代数选讲（续）厦门大学（2003）

[9]韩锦扬.矩阵乘法$AB=BA$成立的两个充要条件与一个充分条件.工科数学，1995，1:169-170

[10]戴立辉，颜七笙，刘龙章.矩阵可交换的条件及可交换矩阵的性质.华东地质学院学报，2002，25(4):353-355

[11]张斌.关于矩阵可交换的研究. 中国优秀硕士学位论文全文数据库, 网络出版投稿时间, 2009-03-12 电子科技大学

[12]俞争光，刘坤林，谭泽光，葛余博编著.线性代数通用辅导讲义.清华大学出版社,北京（2006）

谢　谢！